MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DURÉE : 3 heures

Option "Mathématiques"

PROBLÈME

Les parties II *et* III *peuvent être abordées indépendamment*

Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des fonctions u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient :

- dans tout intervalle borné, il existe au plus un nombre fini de points où u n'est pas continue ;
- en tout point a où u n'est pas continue, elle admet des limites à droite et à gauche finies, et $\lim_{t<a,\ t\to a} u(t) \neq u(a)$.

Les éléments de $\mathcal{U}$ sont appelés *contrôles*.

La dynamique d'un système réel, contrôlé par u, est une fonction continue X de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui vérifie l'équation :

$$(1) \qquad X(t) = X(s) + \int_s^t [r\,u(\theta)\,[1 - X(\theta)] - k\,X(\theta)]\,d\theta$$

pour tous t, s de $\mathbb{R}$, où r et k sont deux réels strictement positifs.

I

1° Soit u un contrôle continu.

a. Montrer que toute solution de (1) est solution d'une équation différentielle.

b. Montrer que pour tout (s, x) de $\mathbb{R}^2$, l'équation (1) admet une unique solution $t \longmapsto X^u(t, s, x)$, vérifiant $X^u(s, s, x) = x$.

On désignera également cette fonction par le symbole $X^u(\,.\,, s, x)$.

c. En intégrant l'équation différentielle, montrer l'existence d'une fonction continue, $(t, s) \longrightarrow \Phi^u(t, s)$, définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telle que :

i. $\Phi^u(s, s) = 1$

ii. $X^u(t, s, x) = x\,\Phi^u(t, s) + \int_s^t r\,u(\theta)\,\Phi^u(t, \theta)\,d\theta$

iii. $X^u(t, s, x) = 1 - (1 - x)\,\Phi^u(t, s) - k\int_s^t \Phi^u(t, \theta)\,d\theta$

2° Soit u un contrôle quelconque de $\mathcal{U}$.

a. Répondre sous cette hypothèse aux questions 1° *b* et 1° *c*.

b. En déduire que, pour tout contrôle u positif et tout x dans [0,1], on a

$$0 \leqslant X^u(t, s, x) \leqslant 1 \quad \text{pour tout} \quad t \geqslant s.$$

3° *a.* A quelle condition sur le contrôle u, la dynamique $X^u(\cdot, s, x)$ est-elle constante sur un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant s?

b. Pour tout réel $Q \geqslant 0$, on pose $z(Q) = \dfrac{rQ}{rQ + k}$.

On note encore Q le contrôle constant égal à Q.

Montrer que :

si $x < z(Q)$, $X^Q(\cdot, s, x)$ est majorée par $z(Q)$ et strictement croissante;

si $x > z(Q)$, $X^Q(\cdot, s, x)$ est minorée par $z(Q)$ et strictement décroissante.

c. Montrer que : $X^Q(t, s, x) = X^Q(t - s, 0, x)$.

En déduire que si $s < s'$ et $x' < x < z(Q)$, on a :

$$X^Q(t, s, x) > X^Q(t, s', x') \quad \text{pour tout } t.$$

4° Soient $I = [Q_1, Q_2]$ un intervalle de $\mathbb{R}^+$, x un point de $[0, 1]$ et $t \geqslant s$.

Soient $\hat{U} = \{u \in \mathcal{U};\ \forall\,\theta \in [s, t],\ u(\theta) \in I\}$

et $K(t, s, x) = \{X^u(t, s, x);\ u \in \hat{\mathcal{U}}\}$.

$K(t, s, x)$ est l'ensemble des points susceptibles d'être atteints au temps t par un système contrôlé par un élément de $\hat{\mathcal{U}}$.

Montrer que $K(t, s, x)$ est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ que l'on explicitera.

II

Soient Q, T, m, c des réels strictement positifs. On suppose désormais que x est dans [0, 1].

A chaque contrôle u de $\mathcal{U}$, on associe la fonction objectif J^u, définie sur [0, 1] par :

$$J^u(x) = \int_0^T e^{-ct}\,[m\,X^u(t, 0, x) - u(t)]\,dt$$

Soit $\mathcal{U} = \{u \in \mathcal{U};\ \forall\,t \in [0, T],\ u(t) \in [0, Q]\}$

Un contrôle u est <u>x-optimal</u>, si u appartient à $\mathcal{U}$ et

$$J^u(x) = \sup\{J^v(x);\ v \in \mathcal{U}\}$$

1° Soient u et v deux éléments de $\mathcal{U}$ et ε un réel.

a. Montrer que $X^{u+\varepsilon v}(t, 0, x)$ est une fonction de ε dérivable, et calculer sa dérivée en 0 notée $D(u, v, t, x)$.

b. Montrer :

$$\int_0^t \left[\int_\theta^t rv(s)\,ds\right]\Phi^u(t, \theta)\,d\theta = \int_0^t \left[\int_0^s \Phi^u(t, \theta)\,d\theta\right] rv(s)\,ds$$

c. En déduire que :

$$D(u, v, t, x) = \int_0^t rv(\theta)\,[1 - X^u(\theta, 0, x)]\,\Phi^u(t, \theta)\,d\theta$$

2° *a.* Montrer que $J^{u+\varepsilon v}(x)$ est une fonction de ε dérivable, et que sa dérivée en 0, notée $j(u, v, x)$ est égale à :

$$j(u, v, x) = \int_0^T [r\lambda^u(t)\,[1 - X^u(t, 0, x)] - 1]\,v(t)\,e^{-ct}\,dt$$

où $\lambda^u(t) = m\int_t^T \left[\exp - \int_t^s (ru(\theta) + k + c)\,d\theta\right] ds$

../..

b. Montrer que $\lambda^u(t)$ est la solution de l'équation intégrale :

$$(2)\quad \Lambda(t) = \Lambda(s) + \int_s^t [(ru(\theta) + k + c)\,\Lambda(\theta) - m]\,d\theta$$

satisfaisant à $\Lambda(T) = 0$.

3° Soit u un contrôle x-optimal.

a. Montrer que pour tout v de $\mathcal{U}$, on a $j(u, uv, x) \geqslant 0$.

b. Soit $t \in]0, T[$ tel que $r\lambda^u(t)[1 - X^u(t, 0, x)] - 1 < 0$

Montrer que $u(t) = 0$

c. Montrer que pour tout v de $\mathcal{U}$, on a $j(u, (Q - u)v, x) \leqslant 0$

d. Soit $t \in]0, T[$ tel que $r\lambda^u(t)[1 - X^u(t, 0, x)] - 1 > 0$

Montrer que $u(t) = Q$.

III

Cette partie peut être traitée indépendamment de la seconde partie, dont on utilise seulement les notations.

On rappelle que Q, r, k, m, c sont des réels strictement positifs donnés.

Soient u un contrôle de $\mathcal{U}$ et (x, l, s) un élément de $[0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R}^*$.

On désigne par $\Lambda^u(\cdot, s, l)$ l'unique solution de l'équation (2) définie en II.2°*b.* vérifiant $\Lambda^u(s, s, x) = l$, et on pose :

$$W^u(t, s, x, l) = r\,\Lambda^u(t, s, l)[1 - X^u(t, s, x)] - 1$$

1° *a.* Montrer que $W^u(\cdot, s, x, l)$ admet une dérivée continue par rapport à t, $DW^u(\cdot, s, x, l)$, qu'on calculera en fonction de $X^u(\cdot, s, x)$ et $\Lambda^u(\cdot, s, l)$.

b. Soit θ un réel tel que $W^u(\theta, s, x, l) = 0$ et $X^u(\theta, s, x) \in [0, 1[$.

i. **Montrer** que $DW^u(\theta, s, x, l) = 0$ si et seulement si

$$X^u(\theta, s, x) = 1 - \frac{c + \sqrt{4mrk + c^2}}{2mr}$$

ii. Soit $$x^* = 1 - \frac{c + \sqrt{4mrk + c^2}}{2mr}$$

Montrer que $DW^u(\theta, s, x, l)$ est du signe de $X^u(\theta, s, x) - x^*$.

c. Soit $\alpha = \dfrac{mr}{k + c}$.

Montrer que x^* appartient à $[0, 1[$ si et seulement si $\alpha \geqslant 1$.

d. On suppose $\alpha \geqslant 1$.

Soit $u^* = \dfrac{kx^*}{r(1 - x^*)}$, le contrôle constant qui vérifie $z(u^*) = x^*$ (cf. I.3° *b.*).

Montrer que $W^{u^*}\left(\cdot, s, x^*, \dfrac{1}{r(1 - x^*)}\right)$ est identiquement nulle.

Dans toute la suite, on suppose $\alpha \geqslant 1$.

Pour tout y de $[0, 1]$, on cherche à construire un contrôle u de $\mathcal{U}$, ne prenant que les valeurs 0, Q et u^* et qui vérifie pour $t \in [0, T]$:

(S)
- si $X^u(t, T, y) \in [0, 1[$ et $W^u(t, T, y, 0) < 0$, alors $u(t) = 0$
- si $X^u(t, T, y) \in [0, 1[$ et $W^u(t, T, y, 0) > 0$, alors $u(t) = Q$

On notera que, pour tout contrôle u de $\mathcal{U}$, $W^u(T, T, y, 0) = -1$.

2° *a.* Montrer qu'il existe un couple $(y^*, \tau^*) \in [0, 1] \times]-\infty, T]$ unique tel que :

$$X^0(\tau^*, T, y^*) = x^* \text{ et } W^0(\tau^*, T, y^*, 0) = 0$$

.../...

b. En déduire que pour tout y de $[0, y^*]$, il existe $t < T$ tel que $W^o(t, T, y, 0) > 0$.

On désigne alors par $\tau(y) = \sup \{ t < T, W^o(t, T, y, 0) > 0 \}$.

Étudier l'application $y \longmapsto \tau(y)$ de $[0, y^*]$ dans $]-\infty, T]$ et montrer que $\tau(y^*) = \tau^*$. A quelle condition a-t-on $\tau(0) \geqslant 0$?

c. On suppose $x^* \leqslant z(Q)$. ($z(Q)$ a été défini en I.3° *b.*)

Montrer que pour tout $x \leqslant x^*$, $1 - X^Q(\cdot, s, x)$ et $\Lambda^Q(\cdot, s, 1/r(1-x)$ sont des fonctions décroissantes.

En déduire que $W^Q(t, s, x, 1/r(1-x)) \geqslant 0$ si $t \leqslant s$.

d. Soit $y \in [0, y^*[$. Nous supposons $\tau(0) \geqslant 0$.

Montrer qu'un contrôle défini sur $[0, T]$ par

$u(t) = Q$ si $t \leqslant \tau(y)$, et $u(t) = 0$ si $t > \tau(y)$ vérifie (S).

3° *a.* Soit $y \geqslant x^*$. Montrer que $X^o(t, T, y) \geqslant x^*$ si $t \leqslant T$.

En déduire que $W^o(t, T, y, 0) \leqslant 0$ si $t \leqslant T$.

b. Par un raisonnement analogue, montrer que si $x \geqslant x^*$ et si $W^o(\cdot, s, x, l)$ est strictement négatif dans un intervalle $]s', s[(s' < s)$, pour tout $t \leqslant s$, on a $W^o(t, s, x, l) \leqslant 0$.

c. Soit $y \in]y^*, x^*]$.

Montrer qu'il existe $\theta > \tau^*$ tel que $X^o(\theta, T, y) = x^*$.

Montrer que si $\theta \leqslant t \leqslant T$, $W^o(t, T, y, 0) \leqslant 0$.

En déduire que si $t \leqslant T$, $W^o(t, T, y, 0) \leqslant 0$.

d. Soit $y \in]y^*, 1]$.

Montrer qu'un contrôle égal à 0 sur $[0, T]$ vérifie (S).

e. Soit σ un point quelconque de $[0, \tau^*]$.

Montrer qu'un contrôle u, défini sur $[0, T]$ par :

$$u(t) = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant \sigma,$$
$$u(t) = u^* \quad \text{si} \quad \sigma < t \leqslant \tau^*,$$
$$u(t) = 0 \quad \text{si} \quad t > \tau^*,$$

vérifie (S) pour y^*.

f. Soit $x \in [0, 1[$. On suppose $\tau(0) \geqslant 0$.

Montrer qu'il existe $y \in [0, 1]$ et u vérifiant (S) tels que : $x = X^u(0, T, y)$.

Montrer que :

$u(t) = 0$ si $r\lambda^u(t)[1 - X^u(t, 0, x)] - 1 < 0$

et

$u(t) = Q$ si $r\lambda^u(t)[s - X^u(t, 0, x)] - 1 > 0$.